





### ▲黃淑謨啓事

竊二十一日刊學生會審計委員會通告戊戌項質問部人條，其言：鄙人跳離事，曾於紀念會前二週經遊藝組委員王露芬君承辦，名辭退，化裝費鄙人並未簽名領取，當係他人冒名假造，名譽攸關，特此聲明。

### ▲北大廣東同鄉會啓事(三)

本會年刊原定二月一日齊稿，今因期限將屆，寒假在還假期二十一日正是執筆，屬稿時本會爲謀年刊內容充實，特展期至三月一日止，俾諸同得於假期中從容撰作，仍望速賜鴻篇，早刊成爲荷。假期中續收稿稿件仍由北大三齋轉本會。

一月二十三日

### ▲北大學生會民衆夜校總務股包乾元啓事

頃接友人自南方來函，邀我在寒假期間同作莫干山之遊，此事正中下懷也；然一不能掛兩頭，故已回校校方面請假一月，在未消假期內，一切門子總務股事宜均由副主任白傑君負完全責任；至于本股一切由元經手之收支賬目及餘款亦于同日點交白君接受矣。

一月二十一日

### ▲三十一週紀念會游藝股新劇組啓事

二十一日本刊所載審計委員會通告之(一)丙：「新劇組既有化裝技師，且以五十元爲總化裝費，爲何又開支化裝費三十餘元？」按化裝技師之聘請，係王桂君經手，化裝者爲英文劇，法文劇，德文劇，及女同學之中文劇之演員。化裝費本是依劇而遞增，我們直接籌備的二劇，不在其列，故另支費購用，第一次僅用十二元，後因男女演員分開化裝，只得添購一份，去洋十二元四角六分，用剩的業已交過籌備會。至所問三十餘元，與我們所經手的二十四元四角六分相差數元，其所差之數，想係他劇所用，他劇賬單，皆直接交給遊藝股的，怎麼用的，我們就不知道，特此聲明答復。

黃光弼同啟 一月二十三日  
徐伯訂

### ▲北大演說辯論會通告

一月二十日

逕啟者：茲因寒假在還會員多已，里本會每週平時練習暫停一俟下期開學後再積極進行此佈。

### ▲劉生濬緊要啓事

本校一月二十一日刊，載有劉生濬啓事一則，閱悉之下，不勝駭異！竊生濬對于該項啓事，事絕不知情，顯係被人捏造。生濬與小友社久已絕關係，該社一切收入支出，經手有人生始終未負絲毫責任。除向日刊誤認該項啓事來源廣厲置外，特此鄭重聲明。

一月二十二日

### ▲顏秀三啓事

昨閱本刊刊登自立啓事，內有顏某一人，又係四子小友社問題，當然是鄙人，鄙人謹當署名負責聲明。任君前次之啓事，云張君同南以前，已共同商妥，既商妥矣，便宜起早，且月餘來本社尚未接有張君來信說明也。又云劉君在數月以前，即以此相商，現在本人既未離平，理應互相計議，徵其同意。惟器與名，不可假人！苟無害于秀三，秀三讓諸君吹噓滿池春水，無干儂事。茲據任君所不得不再三聲明者，爲小友社基金。此題似涉及顏某，雖繁若減之嫌，呵呀，這真有點急煞我也！謹客陳之：緣小友社創辦，經費全由我個人負擔，據李君中吳清算，出版至第九期，已用費二百餘金，出夏子，邵，劉，張諸君共同加入，從新改組，均以獨力不能維持久遠，于其有募集基金之舉，叩叩呼，誰願意爲？以致停刊數月，仍一紙空名，秀三言小見其此因緣，失信兒童，又劉君若生濬同各相讓協力，求援助，繼續出版，隨刊隨付，實無所謂基金。任君所云捐助集款已數百，不知何所指，請再詳爲聲明。現每冊印兩千，平均所費約二十餘圓，由郵分寄各教育局轉達各小學，分銷處只有一院和東齊號，每期的收四枚，所銷不過二十三十份，此外並無絲毫收入。承各師友熱心援助，本擬在寒假內整齊完竣，再印一報告書，或登之本報日刊，(因多有誦本校師友，專登日刊，恐本人不知)以鳴盛意。秀三上課，編稿，分發，事多心多，以至延遲至今，此誠深所抱歉者也！秀三才識淺薄，不自量，而負此重任，始終認爲教育上所應盡之事業，今雖稍具基礎，而經費困難，行將暫閉，各處兒童之夾函詢問出版者，恐不久又將堆滿我之書案矣。有願以本社作爲兒童教育之試驗者，秀三仍願極力從旁贊助，俾才歷週歲之本社，不至夭折，秀三當以香醇祝九願首以待之。敬希區區，代冀公鑒。

一月二十二日

### ▲賀仰蓮啓事

本人第一號校章遺失除向補發外特此聲明作廢



總 稿 稿

零不可為除數

馮漢叔先生在中  
國數理學會講演  
經王源筆記  
孫丕顯

前幾天和張少涵先生談起，初等數學書上，關於零不可為除數的問題，所謂是略，中小學教員往往不甚深切了解，所以兄弟今天選擇這一個淺近的题目，加以討論，也許不無一得。

(一)數 (number) 之來源

人們最初有數的觀念，是因為眼睛裏看見了東西，世界上一切的東西，單一的很少，差不多都是成羣的，譬如一株樹，牠是由許多樹枝集合而成的，我們的手五指而成一羣，也是一個很好的例證，

如甲爲一羣東西，牠有一種不變性

，假使我們拿走一元 (element)

換上另一元；再拿走一元，再換上另一元；如此任意更換，

牠的不變性依舊存在；這種不變的性質就叫做數，

又如乙也是一羣東西，這一羣裏邊的各元和甲相配，如能使彼此相當，那末，甲乙便是相等

，倘若甲中各元和乙相配而有一餘，我們就說甲大於乙，

這樣一羣一羣的東西，我們用下面的符號來表明牠：

I, II, III, IV, .....  
但是這種符號，寫時又覺得太麻煩；所以又改用

1, 2, 3, 4, .....

來替代牠們，因此我們得到了一種「正整數系」，或者叫做「自然數系」 (Natural number system)

(2) 自然數之各種運算

a) 加法：合兩數爲一數，或者合三個四個等數爲一數，叫做加法，

b) 乘法：乘法是加法的一種簡便方法例如

$$3 + 3 + 3 + 3$$

我們寫成  $3 \times 4$  這就是說把四個同樣的3加在一起，

加法和乘法合稱爲「順運算」 (direct operation)

在自然數系中，順運算有兩種特性：一

(i) 可能 (possible)：任意取二數相加或相乘，其結果加還是自然數系裏邊的一個數

(ii) 一致 (uniform)：如  $3 + 4$  等於7決不是6

或8，結果是只有一個數，

c) 減法：這是加法的還原，譬如我們已經知道  $3 + 4 = 7$  現在要問什麼數加3等於7？於是就發生了減法，

d) 除法：這是乘法的還原，譬如我們已經知道  $3 \times 4 = 12$  假如問什麼數乘3等於12？於是除法也就發生了，

(3) 有理數系之產生

在自然數系裏，加法和乘法都是够用的，然

而減法和除法，有時候就不够用了，例如用

什麼數加7還等於7？用什麼數加7變成0？用什

麼數乘12也變成3？要解決此等問題時，自然數

便不敷應用；於是又生出零，負數和分數來，如

此，自然數系就擴大而成有理數系 (Rational

number system) 有理數系可用下法簡單表示之：

$$..... -1, ..... 0, ..... \frac{1}{n}, ..... 1, ..... 2, .....$$

在有理數系中，加減乘除四等基本運算是可

能的，而且是一致的，但是零這個數不能和混

並論

(i) 零之定義

任意一數減去牠自己便是零，如

$$a - a = 0$$

(ii) 零之特性

I, 因加減乘除在有理數系中有三基本定律 (the

fundamental laws)

a) 結合定律 (law of association)

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

b) 交換定律 (law of commutation)  
如  $a + b = b + a$

c) 分配定律 (law of distribution)

$$a(b + c) = ab + ac$$

如按零之定義： $a - a = 0$

應用 b), 則  $-(a + a) = -a - a$

$$-(a + a) = -a - a$$

$$-0 = +0$$

所以任一切數中正面和負面相等的具有零，

是數加0仍爲某數，某數減零也仍爲某數，

$$a + 0 = a$$

$$a - 0 = a$$

3, 有限數零加其結果還是0

$$0 + 0 + ..... + 0 = 0$$

1, 在有理數系中，任何數用零一乘還是零，

$$1 \times 0 = 0$$

$$0 \times 0 = 0 \times 0 = (a - a) \times 0 = a \times 0 - a \times 0 = 0 - 0 = 0$$

$$= a \times 0 - a \times 0 = 0$$

$$= 0$$

又依交換定律， $0 \times b = b \times 0 = 0$ ，

由此可知，任何數乘零等於零，零乘任何

數也等於零，

(ii) 除法之研究

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

已知 a, b 要求 a，這就是要找出一個數，

拿牠和 b 相乘就得 a，

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

$$b = 3$$

我們就知道  $a \div 3 = \frac{a}{3}$

這種結果的獲得，完全是由經驗而來的，大

概一切的反運算都離不了經驗的，現在就  $a \div 0 = 0$

這一個式子加以研究：

1. 若  $b \neq 0$   
 $a = 0$   
則  $a$  只能等於 0 此結果是可能的而且是一致的。

2. 若  $b = 0$   
 $a = 0$

則根據乘法的經驗任何數乘零，都得零，所以求  $a$  為不可能

3. 若  $b = 0$   
 $a \neq 0$

則根據乘法的經驗，我們可以斷定  $a$  為不定，就是。不拘什麼數都可由此可知加減乘除四種基本運算，普通都是可能而一致的但是假使以零為分母，那末，牠的結果便是不可能或者不定，所以在數算中，拿零做除數是絕對不行的。

(7) 用零為除數所生之謬誤

我們假使在運算的時候，一不小心，竟用零去做除數，就可以發生一種很奇怪的錯誤，現在舉幾個例來說明：

例 1. 設  $a = b$   
 $a^2 = ab$   
 $a^2 - b^2 = ab - b^2$   
 $(a+b)(a-b) = b(a-b)$

等式之兩端同以  $(a-b)$  除之得：

$$a+b=b$$

$$2b=b$$

$$2=1$$

例 2. 設  $N = 2, 3, \dots, (A)$   
 $N^2 - 4 = 0$   
 $(N+2)(N-2) = 0$

等式之兩端同以  $(N-2)$  除之得：

$$N+2 = 0 \dots \dots (B)$$

由 (A), (B) 得  $2 = -2$ ，

以上二例，都發生錯誤的結果，究其原因，則由於運算時，都曾經零除過，在例 1 裡，

$a = b$ ，所以拿  $(a-b)$  除是不可能的，在例 2 裡，

$N = 3$ ，所以拿  $(N-2)$  除，當然也會有同樣的錯誤，況且  $0$  為不定，而勉強叫牠為零，尤為不妥，現在再舉一個例來說明這一種理論：

假定  $(N-a)(N-b) = 0$

設  $N = a$

然後得  $N-b = 0$

即  $N = b$

或設  $N = b$

然後得  $N-a = 0$

即  $N = a$

所以由  $(N-a)(N-b) = 0$

我們只可說  $N = a$  或  $N = b$

假使說  $N = a$  又  $N = b$

那就根本錯誤了！這實在是因為在這個方程式裏，兩個因數是不能同時等於零的。

(8)  $\frac{1}{0} = x$  之解釋。

在解算中， $0$  的定義，和我們上面所說的並不一樣，這裏所用的零，是代表極限值的零，

若  $x = a - a = 0$

我們說之值為零  
倘若說之極限值為零，那末必定是一個變數：

$$- \epsilon < x < \epsilon$$

是一個任意小的正數

$$\text{無論 } \epsilon = \frac{1}{10000}$$

$$\text{或 } = \frac{1}{100000}$$

$$\text{或 } = \frac{1}{1000000} \dots \dots$$

$x$  都常在一  $\epsilon$  和  $\epsilon$  的中間，如此得  $x$  之極限值為零，也可以說  $x$  趨於零 (tends to zero)，可不然說  $x$  逼近於零 (approaches to zero)，以  $x \rightarrow 0$  表之，這並不是說  $x$  就真正等於零。

例如我們把  $0$  到  $1$  的線分逐次二等分，令剩下的  $x$  作為  $x$ ：

$$0 \quad \frac{1}{2^n} \quad \frac{1}{2^{n-1}} \quad \dots \quad 1$$

分到最後，則不拘  $\epsilon$  是任何小的正數  $x < \epsilon$  而實不等於零，這就是  $x$  趨於零的意思

$$x \rightarrow 0$$

$$\therefore \frac{1}{x} \rightarrow G \quad (G \text{ 是一個任意的大數})$$

$$\text{即 } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

$x$  趨向於  $0$  有兩方面：

$$1. \text{ 由大趨於零: } x > 0, \quad \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad (R: \text{表自右趨於零})$$

$$2. \text{ 由小趨於零: } x < 0, \quad \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

$$L. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad (L: \text{表自左趨於零})$$

以上二點，極宜辨正，

如設

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 1$$

由上所述，我們可以得出一個很明顯的結論，就是：

(1)  $x \rightarrow 0$ ，則  $x$  除數為不可能，

(2)  $x \rightarrow 0$ ，則  $x$  除數為可能，但  $x$

自左或自右而趨於零，是我們應該注意的一個問題。

(完)

附記：零不能做除數的理論，在物理學方面，也很有相當的意義。今天在數理物理的堂上，我聽見夏先生大加發揮，夏先生說：宇宙間一切的現象，我們都找不出  $\infty$  的情形來，世界的電子，總該是無窮了，然而牠卻等於  $10^{10}$ ，天空的星斗，總該是無窮了，然而牠卻也是一個定數，譬如攝振數數能，frequency =  $\frac{1}{t}$ ，光波振動速率，然而每振動所需的時間也不能等於零；所以 frequency 也沒有達到  $\infty$  的可能，此外夏先生又列力學，音學，光學和相對論上的種種學說，都證明出  $\infty$  的不能存在，我因為夏先生的這一番議論大可與馬先生相互引証，所以特用補記于此，或亦讀者諸君所樂聞與？